11 класс

Задача 1. Фрикционная передача

Трение меняет знак на расстоянии $r_0 = \omega_0 R_0/\omega$ от центра диска. В установившемся режиме полный момент силы трения равен нулю.

В случае сухого трения:

$$\int_0^{r_0} \frac{rF}{R} dr = \int_{r_0}^{R_0} \frac{rF}{R} dr, \qquad \frac{r_0^2}{2} = \frac{R^2 - r_0^2}{2},$$

$$\text{откуда} \qquad r_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_\mu = \sqrt{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}.$$

В случае вязкого трения момент сил трения:

$$\int_0^R r\beta(\omega r - \omega_0 R_0) dr = 0, \qquad \text{так как } \omega r_0 = \omega_0 R_0, \text{ то}$$

$$\int_0^R r\beta(\omega r - \omega r_0) dr = \beta\omega \int_0^R r(r - r_0) dr = 0,$$

$$\text{откуда} \qquad \frac{R^3}{3} = \frac{R^2 r_0}{2}, \qquad \omega_\eta = \frac{\omega_0 R_0}{r_0} = \frac{3}{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}.$$

Отношение скоростей:

$$k = \frac{\omega_\eta}{\omega_\mu} = \frac{3/2}{\sqrt{2}} \approx 1{,}06.$$

Таким образом, установившаяся скорость ω_η вращения в случае вязкого трения на 6 % больше установившейся скорости ω_μ вращения диска при сухом трении.

Задача 2. Круговой процесс

Рассмотрим моль идеального газа. По определению его теплоёмкость:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT}. \qquad (1)$$

Для идеального газа:

$$dU = C_V dT \qquad RdT = pdV + Vdp$$

Выразим теплоёмкость:

$$C = C_V + R\frac{pdV}{pdV + Vdp} = C_V + \frac{R}{1 + \dfrac{V}{p}\dfrac{dp}{dV}}$$

В любых диаметрально противоположных точках A и B касательная к окружности имеет один и тот же наклон:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_A = \left(\frac{dp}{dV}\right)_B \tag{2}$$

Значит, теплоёмкости могут быть равны либо когда dp/dV обращается в ноль, либо бесконечность, чему соответствует $C = C_p$ и $C = C_V$ соответственно, либо когда:

$$V_A/p_A = V_B/p_B,$$

то есть когда точки A, B и центр окружности лежат на одной прямой, идущей из начала координат. Значит,

$$V_A/p_A = V_0/p_0.$$

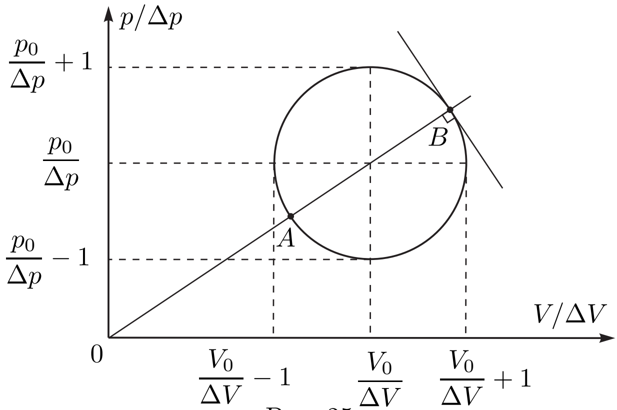

Рис. 25

Перерисуем процесс в безразмерных осях координат (рис. 25). Проведём прямую через точки A и B. Построим касательную к графику в точке B. Она будет перпендикулярна прямой AB. Таким образом, если угловой коэффициент прямой AB равен k, то угловой коэффициент касательной будет равен $k' = -1/k$, следовательно:

$$\frac{dp/\Delta p}{dV/\Delta V} = -\frac{V_0/\Delta V}{p_0/\Delta p}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{dp}{dV} = -\frac{V_0}{p_0}\left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)^2.$$

Теплоёмкость C равна:

$$C = C_V + \frac{R}{1 - \left(\frac{V_0}{p_0}\right)^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)^2}.$$

Если $p_0/V_0 = \Delta p/\Delta V$, то $c = \pm\infty$ — точки касания принадлежат изотермам.

Сравним теплоёмкость в точках C и D, лежащих во 2 и 4 квадрантах соответственно. Поскольку

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_C = \left(\frac{dp}{dV}\right)_D > 0,$$

то теплоёмкость больше там, где отношение V/p меньше:

$$V_C/p_C < V_D/p_D$$

Получается, в нашем случае $C_C > C_D$.

Задача 3. Звезда переменного тока

При подключении к источнику переменного тока двух последовательно соединенных элементов, напряжения на них складываются как векторы, модуль которых равен напряжению, показываемому вольтметром. Угол между осью абсцисс и этим вектором примем равным 0° для резистора, тогда для конденсатора он будет равен $+90^\circ$, а для катушки индуктивности 90°. Заметим, что суммарное напряжение всегда не превосходит суммы напряжений.

Предположим, что один из элементов 1 и 2 является катушкой индуктивности, а другой — конденсатором. Тогда суммарное напряжение на них составляет $U_{12} = 80$ В $- 45$ В $= 35$ В, что равно напряжению источника. Заметим, что $21^2 + 28^2 = 35^2$, значит, в силу правила сложения напряжений, элемент 3 является резистором.

При такой схеме различить, какой из элементов 1 и 2 является конденсатором, а какой — катушкой индуктивности, нельзя, так как поменяв их местами и сохранив импедансы, напряжения не изменятся. Рассмотрим все остальные случаи. Суммарное напряжение на элементах 1 и 2 будет определяться либо как сумма напряжений на каждом (в случае, если 1 и 2 — одинаковые элементы), либо как корень из суммы квадратов напряжений на каждом (в случае, если один из них — резистор, а другой — конденсатор или катушка индуктивности). Тогда суммарное напряжение, равное напряжению источника, в любом случае будет больше, чем, по крайней мере, 80 В. Однако, это больше, чем сумма напряжений в случае подключения источника к выводам 1 и 2. Полученное противоречие показывает, что один из этих элементов является конденсатором, а другой — катушкой индуктивности.

Импедансы складываются аналогично напряжениям. Отношение модулей импедансов двух элементов при последовательном соединении равно отношению напряжений на этих элементах, следовательно: $Z_1 : Z_3 = 4 : 3$ (из схемы с подключением источника к выводам 1 и 3), $Z_3 : Z_2 = 4 : 3$ (из схемы с подключением источника к выводам 2 и 3). Пусть $Z_2 = 9$, $Z_3 = 12$, $Z_1 = 16$ относительных единиц. Тогда, пользуясь правилом сложения импедансов, находим: $Z_{12} = 7$, $Z_{13} = 20$, $Z_{23} = 15$. Отношение сил токов обратно пропорционально отношению импедансов, откуда

$$I_{12} : I_{13} : I_{23} = \frac{1}{7} : \frac{1}{20} : \frac{1}{15} = 60 : 21 : 28.$$

Задача 4. МГД-насос

Рассмотрим маленький шарик жидкости объёма V, который попадает в пространство между проводящими пластинами, и силы, которые на него действуют.

Сила тяжести:

$$F_{\text{т}} = \rho_0 g V.$$

В силу того, что плотность тока одинакова в любой точке жидкости между проводящими пластинами (маленький шарик не влияет на распределение тока), на любой элемент жидкости одинакового объёма внутри действует одинаковая сила, тогда на шарик объёма V действует сила:

$$F_{\text{амп}} = \frac{BIb}{abh} \cdot V = \frac{BI}{ah} \cdot V,$$

где $I = \dfrac{Uah}{\lambda b}$. Для того, чтобы жидкость поднялась вверх:

$$F_{\text{амп}} > F_{\text{т}} \qquad \text{откуда} \qquad \frac{BU}{\lambda b} > \rho_0 g \qquad \text{и} \qquad U > U_{\text{кр}} = \frac{\rho_0 g \lambda b}{B}.$$

При $U > U_{\text{кр}}$ на маленький шарик жидкости между пластинами со стороны остальной жидкости действует сила Архимеда $F_{\text{арх}}$, направленная вниз. Поскольку шарик находится в равновесии, то

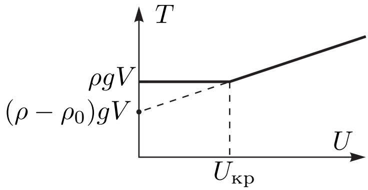

Рис. 26

$$F_{\text{арх}} = F_{\text{амп}} - F_{\text{т}} = \left(-\rho_0 g + \frac{BU}{\lambda b}\right) \cdot V.$$

На непроводящий шарик действует такая же по величине сила Архимеда со стороны жидкости, а также сила натяжения нити $T\left(U\right)$ и сила тяжести. Тогда в равновесии:

$$T\left(U\right) = F_{\text{арх}} + \rho g V$$

Отсюда получаем искомую силу натяжения нити при $U > U_{\text{кр}}$:

$$T\left(U\right) = \rho g V - \left(\rho_0 g - \frac{BU}{\lambda b}\right) V = \left(\rho - \rho_0\right) g V + \frac{BU}{\lambda b} V.$$

Окончательный вид зависимости:

$$T(U) = \begin{cases} \rho g V & \text{при} \quad U \leqslant \rho_0 g \lambda b / B, \\ \left(\rho - \rho_0\right) g V + \dfrac{BV}{\lambda b} U & \text{при} \quad U > \rho_0 g \lambda b / B. \end{cases}$$

Примерный график этой зависимости приведён на рис. 26.

Задача 5. Солнечный парус

Рассмотрим процесс отражения фотона от зеркала паруса. Пусть скорость зеркала v, импульс фотона до столкновения равен p_1, а после столкновения p_2. Пусть изменение скорости зеркала в результате такого столкновения равно $\Delta v \ll v$. Запишем, законы сохранения импульса и энергии для системы зеркало-фотон:

$$p_1 + mv = -p_2 + m(v + \Delta v), \tag{1}$$

$$p_1 c + \frac{mv^2}{2} = p_2 c + \frac{m(v+\Delta v)^2}{2}. \tag{2}$$

Преобразуя уравнения и учитывая $\Delta v \ll v$, получим:

$$p_1 + p_2 = m\Delta v, \tag{3}$$

$$(p_1 - p_2)c = mv\Delta v, \tag{4}$$

откуда выразим изменение импульса зеркала в результате одного столкновения

$$\Delta p = m\Delta v = p_1 + p_2 = 2p_1 \frac{c}{c+v}.$$

Пусть за единицу времени происходит n столкновений с неподвижной площадкой, а энергия одного фотона, летящего в сторону зеркала, равна E_1. Тогда $WS = nE_1$. Величина энергии, излучаемой Солнцем является постоянной в пределах заданного телесного угла. Площадь сечения площадки, опирающейся на телесный угол с радиусом, много меньшим расстояния до Солнца, прямо пропорциональна квадрату расстояния до Солнца, значит $W \propto 1/R^2$, то есть $W = W_0 R_0^2/R^2$.

Поскольку парус движется со скоростью v, то число ударов в единицу времени уменьшается до величины $n_1 = n\Delta t(c-v)/c$. Импульс, переданный за время Δt, равен $n_1 \Delta t \Delta p$. Сила светового давления на зеркало:

$$F_W = \frac{\Delta p n_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{W_0 S}{E_1}\frac{R_0^2}{R^2}\frac{2cp_1}{c+v}\frac{c-v}{c} = \frac{2W_0 S}{c}\frac{c-v}{c+v}\frac{R_0^2}{R^2}$$

и направлена от Солнца.

Сила гравитационного притяжения

$$F_G = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2}\frac{m}{R^2},$$

где T — период обращения Земли вокруг Солнца. Для движения тела с постоянной скоростью сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю. Заметим, что F_G и F_W пропорциональны $1/R^2$, значит, движение с постоянной скоростью возможно при любом расстоянии до Солнца. Найдём скорость

v из равенства сил F_G и F_W:

$$\frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2}\frac{m}{R^2} = \frac{2W_0 S}{c}\frac{c-v}{c+v}\frac{R_0^2}{R^2},$$

$$\text{откуда} \qquad v = \frac{W_0 S T^2 - 2\pi^2 R_0 m c}{W_0 S T^2 + 2\pi^2 R_0 m c} c = -1{,}19\cdot 10^7 \text{ м/с},$$

то есть скорость зеркала направлена к Солнцу. Через один час полёта расстояние от тела до Солнца будет составлять $R_1 = R_0 - |v|t = 1{,}07\cdot 10^{11}$ м $= 0{,}72$ а.е.